

Mathématiques 2 – Économies Gestion

Jean DELHAYE

Table des matières

Préface	4
I Suites	5
1 Raisonement par récurrence	5
2 Introduction aux suites	6
2.1 Suites définies par restriction d'une fonction	6
2.2 Suites définies par récurrence	6
3 Propriétés des suites	7
3.1 Monotonie	7
3.2 Minoration et majoration	8
3.3 Convergence	8
4 Suites arithmétiques et géométriques	10
5 Suites récurrentes linéaires	11
5.1 Le premier ordre	11
5.2 Le second ordre	13
6 Exercices	15
II Matrices	20
1 Introduction aux matrices	20
2 Inversion d'une matrice	22
2.1 Définition	22
2.2 Critère d'inversion	23
3 Coordonnées	24
3.1 Changement de base	24
3.2 Matrices semblables	26
3.3 Applications linéaires	26
4 Exercices	27
III Analyse à plusieurs variables	32
1 Fonctions à plusieurs variables	32
1.1 Dérivées partielles premières	32
2 Optimisation	32
2.1 Extrema d'une fonction à une variable	32
2.2 Optimisation libre	33
A Variations	36
1 Polynôme de degré 2	36
2 Dérivées	37

TABLE DES MATIÈRES








3	Variations	37
B	Limites	40
1	Comparaisons	40
2	Développements limités	41
C	Annales	43
	Examen 2019	43
	Partiel 2 2022	46
	Examen 2022	49

Préface

Ce document est un support pour le cours de Mathématiques 2 destiné aux étudiants en deuxième année de licence économie et gestion de l'Université Paris-Saclay. Il contient quelques rappels de cours et notamment une banque d'exercices corrigés. Il ne constitue en rien un remplacement aux cours magistraux et on ne saurait encourager suffisamment les étudiants à assister à ces derniers.

L'organisation de ce document est comme suit – il contient les trois chapitres de cours (suites, matrices et optimisation), chaque chapitre contient d'abord des rappels de cours puis se termine toujours par une section d'exercices, tous corrigés.

Nous adopterons les symboles suivants tout au long de l'ouvrage :

-  Le chapeau de magicien indique un résultat qui ne peut s'expliquer que par la magie.
-  Le document indique un exercice qui est également présent sur l'une des feuilles de TDs.
-  Le livre indique un exercice qui suit directement du cours et qu'il est intéressant de faire pour voir si on a bien assimilé ce dernier.
-  Le cerveau indique un exercice où il y a une petite astuce à voir.
-  Le chapeau de cérémonie indique un exercice type d'examen qu'il est important de savoir faire.
-  Le crâne indique un exercice très complexe qu'il n'est pas impératif de savoir faire mais l'on conseille tout lecteur de s'y attarder.
-  Le dragon indique un exercice souvent très théorique, à faire uniquement pour le plaisir.

Enfin, il ne s'agit d'une version que très préliminaire. J'encourage donc tout lecteur attentif à me signaler les erreurs qu'il pourrait y trouver – voire à faire des suggestions de contenu que je pourrais ajouter.

© DELHAYE Jean 2023

Suites

1 Raisonnement par récurrence

Lorsque l'on veut montrer une propriété $\mathcal{P}(n)$ pour tout entier $n \geq n_0$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, on procède souvent par récurrence. Un raisonnement par récurrence est toujours constitué de trois étapes :

- Initialisation. On commence par montrer la propriété au premier rang n_0 ¹ – cela revient à vérifier que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- Hérédité. Ensuite, on veut voir que la propriété qui nous est demandée est héréditaire – c'est à dire que $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$ pour tout $n \geq n_0$. On fixe donc un entier $n \geq n_0$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion. Enfin, on est prêt à sortir la formule magique "nous avons montré par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ ".

Toute la construction du raisonnement par récurrence repose sur l'idée que l'on fait tomber les dominos de la preuve de proche en proche comme suit :

$$\mathcal{P}(n_0) \implies \mathcal{P}(n_0+1) \implies \mathcal{P}(n_0+2) \implies \dots \implies \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1) \implies \dots$$

L'initialisation revient à faire tomber le premier domino et l'hérédité permet de voir que la chute de chaque domino provoque la chute du suivant.

Théorème I.1.1 (Raisonnement par récurrence). Soit $\mathcal{P}(n)$ une valeur de vérité dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Supposons que

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$;
- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ pour tout $n \geq n_0$.

Alors, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exercice E. 1 (☐). Montrer que $10^n - 1$ est un multiple de 9 pour tout $n \geq 1$.

Solution E. 1. L'affirmation est claire au rang 1 puisque $10^1 - 1 = 10 - 1 = 9$. Maintenant supposons que $10^n - 1$ soit un multiple de 9 pour un certain $n \geq 1$. On peut donc écrire $10^n - 1 = 9k$.

$$\begin{aligned} 10^{n+1} - 1 &= 10^n(9 + 1) - 1 \\ &= 9 \times 10^n + 10^n - 1 \\ &= 9 \times 10^n + 9k \\ &= 9(10^n + k). \end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence.

1. Le premier rang est souvent 0 ou 1 mais il arrive qu'une récurrence démarre à un autre rang.

2 Introduction aux suites

Définition I.2.1. Une *suite* (réelle) u est une fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{R} :

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n. \end{cases}$$

On peut aussi le voir comme une collection de nombres $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où chaque u_n est un réel.

Dans ce cours, nous verrons deux méthodes générales afin de décrire les suites – celles définies par restriction d’une fonction et celles définies par récurrence.

2.1 Suites définies par restriction d’une fonction

Définition I.2.2. Soit $U \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble des réels contenant les entiers \mathbb{N} et une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. On peut alors définir une suite u en posant

$$u_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

On dit que u est définie par *restriction* de la fonction f .

Remarque I.2.3. Il est impératif que U contienne les entiers, car il faut que f soit bien définie sur ceux-ci au risque d’avoir certains éléments non-définies.

Prenons par exemple la fonction

$$f : \begin{cases}]-\infty, 5] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{5-x}. \end{cases}$$

Dans ce cas, on ne peut pas définir la suite u par la formule $u_n = f(n)$ car bien que certains termes aient un sens ($u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$) au bout du rang 6 on tombe sur un non-sens :

$$u_6 = f(6) = \sqrt{5-6} = \sqrt{-1} \quad \text{Absurde.}$$

Exercice E. 2 (☐). Donner un exemple de suite définie par restriction avec une fonction f qui n’est pas définie sur \mathbb{R} tout entier².

Solution E. 2. Prenons la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x} + \sqrt{x} - 1$. Cette fonction n’est définie que sur $[0, 1]$, et l’on peut définir la suite

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que la suite est bien définie revient à montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On laisse le soin au lecteur de vérifier ce fait.

2.2 Suites définies par récurrence

Définition I.2.4. On dit qu’une suite u est définie *par récurrence* si l’on peut écrire

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

avec $f : \mathbb{R} \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ et $u_0 \in U$ fixé.

2. c’est à dire avec $U \neq \mathbb{R}$.

Remarque I.2.5. On peut étendre la définition précédente. Parfois, une suite définie par récurrence peut dépendre non seulement du terme précédent mais des deux termes précédents.

On peut par exemple considérer une suite de la forme

$$u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

avec $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ fixés. Voir l'Exercice 14.

Notons que l'on pourrait encore étendre la définition à une suite dont chaque terme est fonction de p termes précédents mais on sort là du programme.

Remarque I.2.6. Comme pour le cas de la restriction, si l'on s'amuse à définir une suite par récurrence, il faut faire attention à la stabilité de la fonction f . En effet, f peut n'être définie que sur un sous-ensemble strict $U \subset \mathbb{R}$ – ainsi, s'il existe un rang n_0 tel que $f(u_{n_0}) \notin U$, on ne pourra pas définir u_{n_0+1} .

Si l'on prend par exemple la fonction

$$f : \begin{cases} [5/3, \infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sqrt{3x - 5} \end{cases}$$

et $u_0 = 2$, alors il y aura un problème de définition :

$$\begin{aligned} u_0 &= 2 \\ u_1 &= \sqrt{3 \times 2 - 5} = \sqrt{1} = 1 \\ u_2 &= \sqrt{3 \times 1 - 5} = \sqrt{-2} \quad \text{Absurde.} \end{aligned}$$

3 Propriétés des suites

3.1 Monotonie

Définition I.3.1. On dit qu'une suite u est *croissante* (resp. *décroissante*) si l'on a

$$(I.1) \quad u_{n+1} \geq u_n \quad \text{resp.} \quad u_{n+1} \leq u_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On dira que la suite est croissante (resp. décroissante) à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ si l'Équation (I.1) tient pour tout $n \geq n_0$.

Exercice E. 3 (E). 1. Donner un exemple de suite croissante.

2. Existe-t-il des suites à la fois croissante et décroissante ? Si oui les expliciter.
3. Donner un exemple de suite qui ne soit ni croissante ni décroissante.

Solution E. 3. 1. La suite u définie par $u_n = n$ est clairement croissante.

2. Inspectons ce que cela signifie d'être à la fois croissant et décroissant. Soit u une suite croissante et décroissante. Alors par définition, on a

$$u_{n+1} \geq u_n \quad \text{et} \quad u_{n+1} \leq u_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Autrement dit, $u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ – la suite est donc constante. Réciproquement, toute suite constante est à la fois croissante et décroissante.

Les suites croissantes et décroissantes sont les suites constantes.

3. Il suffit de prendre u définie par $u_n = (-1)^n$.

Proposition I.3.2. 1. Si u est une suite définie par restriction d'une fonction de la forme

$$u_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N}$$

où f est croissante (resp. décroissante) sur $[n_0, \infty[$. Alors, la suite u est croissante (resp. décroissante) à partir de n_0 .

2. Si u est une suite définie par récurrence de la forme

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

où f est une fonction croissante (resp. décroissante). Alors, la suite u est croissante (resp. décroissante).

3.2 Minoration et majoration

Définition I.3.3. On dit qu'une suite u est *majorée* (resp. *minorée*) s'il existe un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$(I.2) \quad u_n \leq c \quad \text{resp.} \quad u_n \geq c, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si une suite est à la fois majorée et minorée, on dit qu'elle est *bornée*.

Remarque I.3.4. Attention, si une suite est bornée, sa constante de minoration et de majoration sont généralement différentes.

Exercice E. 4 (☐). 1. Donner un exemple de suite bornée.

2. Donner un exemple de suite minorée, non-majorée.
3. Donner un exemple de suite qui ne soit ni majorée ni minorée.

Solution E. 4. 1. On peut prendre la suite u définie par $u_n = \frac{n}{n+1}$.

2. La suite u définie par $u_n = n$ est minorée sans être majorée. En effet, elle est positive donc minorée par 0 et $u_n = n \rightarrow \infty$. Elle n'est donc pas majorée.
3. La suite u définie par $u_n = (-1)^n n$ n'est ni minorée, ni majorée puisque

$$u_{2n} = (-1)^{2n} 2n = 2n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty, \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} (2n+1) = -2n-1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty.$$

3.3 Convergence

Définition I.3.5. On dit qu'une suite u est *convergente* s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ telle que

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell.$$

On écrira $\ell = \lim_n u_n$. Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*.

Remarque I.3.6. Il suit de la définition précédente qu'une suite u est divergente si et seulement si elle n'a pas de limite ou si sa limite est $\pm\infty$.

Exercice E. 5 (☐). 1. Donner un exemple de suite convergente.

2. Donner deux exemples de suites divergentes (une qui a une limite infini et une qui n'a pas de limite).

Solution E. 5. 1. Il est bien connue que la suite u définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ tend vers $0 \in \mathbb{R}$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et est donc convergente.

2. • Il est clair que la suite $u_n = n$ tend vers l'infini.
 • On laisse le soin au lecteur de vérifier que la suite $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Proposition I.3.7. Une suite minorée et décroissante (resp. majorée et croissante) est convergente.

Exercice E. 6. Montrer que la suite u définie par $u_n = 2^{-n}$ est convergente.

Solution E. 6. Notons d'abord que la suite est minorée par 0. En effet, tous les u_n sont positifs. Elle est de plus décroissante puisque

$$u_{n+1} = 2^{-(n+1)} = \frac{2^{-n}}{2} \leq 2^{-n} = u_n.$$

La suite est donc décroissante et minorée, le résultat suit alors de la Proposition I.3.7.

Proposition I.3.8. Soit u une suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue. Si u converge vers une limite ℓ , alors la limite vérifie l'équation :

$$f(\ell) = \ell.$$

Exercice E. 7 (☐). Soit u la suite définie par

$$u_0 = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}.$$

Montrer que u converge et donner la limite.

Solution E. 7. Montrons par récurrence, l'assertion

$$\mathcal{H}(n) : \quad u_n \leq 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} \geq u_n, \quad n \geq 1.$$

D'abord, il est clair que $\mathcal{H}(1)$ est vraie puisque l'on a

$$u_1 = \frac{\frac{1}{5} + 1}{2} = \frac{3}{5} \leq 1,$$

et

$$u_1 = \frac{3}{5} \geq \frac{1}{5} = u_0.$$

Supposons que l'on ait $\mathcal{H}(n)$, on a alors d'une part

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + 1}{2} \geq \frac{u_n + 1}{2} = u_{n+1},$$

d'autre part

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} \leq \frac{1 + 1}{2} = 1.$$

D'où l'affirmation par récurrence. Nous avons montré que u est croissante et dominée – elle est en particulier convergente. Sa limite ℓ satisfait donc l'équation

$$\ell = \frac{\ell + 1}{2}.$$

Dont l'unique solution est $\ell = 1$.

Théorème I.3.9 (des gendarmes). Soit u, v et w trois suites telles que les suites v et w convergent vers la même limite ℓ et telles que l'on ait

$$v_n \leq u_n \leq w_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors, u converge vers ℓ .

Exercice E. 8 (☐). Donner la limite de $(\frac{2+\cos(n)}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution E. 8. Rappelons que la fonction cosinus a ses valeurs dans $[-1, 1]$. On a donc

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{2+\cos(n)}{n+1} \leq \frac{3}{n+1}.$$

Les suites $(\frac{1}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\frac{3}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers 0. Donc par le théorème des gendarmes (Théorème I.3.9), on a que $\frac{2+\cos(n)}{n+1} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Pour plus de détails sur les limites, on encourage à consulter l'Appendice B.

4 Suites arithmétiques et géométriques

Définition I.4.1. Soit u une suite.

1. On dit que u est une *suite arithmétique* de premier terme $a \in \mathbb{R}$ et de *raison* $r \in \mathbb{R}$ si

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + r, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On montre par récurrence que sa forme générale est donnée par $u_n = a + rn$.

2. On dit que u est une *suite géométrique* de premier terme $b \in \mathbb{R}$ et *raison* $q \in \mathbb{R}$ si

$$u_0 = b \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n q, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On montre par récurrence que sa forme générale est donnée par $u_n = bq^n$.

Proposition I.4.2. 1. Soit u une suite arithmétique de la forme

$$u_n = u_0 + nr.$$

- (a) Si $r > 0$, alors $u_n \rightarrow +\infty$.
 - (b) Si $r < 0$, alors $u_n \rightarrow -\infty$.
2. Soit v une suite géométrique de la forme

$$v_n = v_0 q^n.$$

- (a) Si $|q| < 1$, alors $v_n \rightarrow 0$.
- (b) Si $q > 1$, alors

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } v_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } v_0 < 0. \end{cases}$$

- (c) Si $q \leq -1$, alors v n'a pas de limite.

5 Suites récurrentes linéaires

5.1 Le premier ordre

Définition I.5.1. On dit qu'une suite u est *récurrente linéaire du premier ordre* si elle satisfait une équation de la forme

$$(E) \quad u_{n+1} = au_n + g(n), \quad n \in \mathbb{N},$$

où $a \in \mathbb{R}^*$. On appelle la partie $g(n)$ le *second membre*. On appelle *équation homogène* associée à (E), l'équation

$$(E_h) \quad v_{n+1} = av_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Remarque I.5.2. Les Équations (E) et (E_h) ont une infinité de solutions lorsque le premier terme n'est pas fixé. Si le premier terme est fixé, il existe au contraire une unique solution.

Théorème I.5.3. Si u^* est une solution particulière de (E) et v une solution générale de (E_h) , alors $u = u^* + v$ est une solution générale de (E).

Méthodologie I.5.4 (Profil d'une suite récurrente du premier ordre). On cherche les suites u vérifiant une équation de la forme (E). On procède comme suit :

1. Les solutions de l'équation homogène (E_h) sont de la forme

$$v_n = v_0 a^n.$$

2. Trouver une solution particulière de (E) dépend de la forme de g .

(a) Si $g = P$ est un polynôme, on a deux cas :

- i. Si $a \neq 1$, alors une solution particulière est de la forme $Q(n)$ où Q est un polynôme de même degré que P .
- ii. Si $a = 1$, une solution particulière est de la forme $nQ(n)$ où Q est un polynôme de même degré que P .

(b) Si $g(n) = Ct^n$ pour deux réels C, t . On a encore deux cas :

- i. Si $t \neq a$, alors une solution particulière est de la forme kt^n pour un certain $k \in \mathbb{R}$.
- ii. Si $t = a$, alors une solution particulière est de la forme kna^n pour un certain $k \in \mathbb{R}$.

Remarque I.5.5. Ce point méthode n'est pas à savoir par cœur et sera souvent rappelé en examen.

Exercice E. 9 ( , ). Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n/2 + n^2 - n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n/2 + 2^n. \end{cases}$$

Solution E. 9. Les deux systèmes ont la même équation homogène :

$$v_{n+1} = \frac{v_n}{2},$$

dont une solution générale est de la forme $v_n = v_0 2^{-n}$.

- Regardons maintenant de plus près le premier système. Une solution particulière de l'équation générale du premier système est de la forme

$$u_n^* = an^2 + bn + c,$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. En exploitant l'équation on a

$$u_{n+1}^* = \frac{u_n^*}{2} + n^2 - n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\implies a(n+1)^2 + b(n+1) + c = \frac{an^2 + bn + c}{2} + n^2 - n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\implies a(n^2 + 2n + 1) + b(n+1) + c = \frac{an^2 + bn + c}{2} + n^2 - n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\implies an^2 + (2a+b)n + a+b+c = \left(\frac{a}{2} + 1\right)n^2 + \left(\frac{b}{2} - 1\right)n + \frac{c}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\implies \begin{cases} a &= a/2 + 1 \\ 2a + b &= b/2 - 1 \\ a + b + c &= c/2 \end{cases} \implies \begin{cases} a &= 2 \\ b &= -10 \\ c &= 16. \end{cases}$$

Ainsi, la solution générale est de la forme $u_n = u_n^* + v_n = v_0 2^{-n} + 2n^2 - 10n + 16$. En évaluant au premier rang, on trouve

$$0 = u_0 = v_0 + 16 \implies v_0 = -16.$$

La solution du premier système est donc donnée par

$$u_n = 2n^2 - 10n + 16 - \frac{16}{2^n}.$$

- Inspectons maintenant le second système. Une solution particulière est de la forme $u_n^{**} = k2^n$ avec $k \in \mathbb{R}$. En exploitant l'équation, on a

$$u_{n+1}^{**} = k \frac{u_n^{**}}{2} + 2^n, \quad n \in \mathbb{N} \implies k2^{n+1} = \frac{2^n}{2} + 2^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\implies k2 = \frac{k}{2} + 1$$

$$\implies k = \frac{2}{3}.$$

Ainsi, la solution générale est de la forme $u_n = u_n^{**} + v_n = \frac{2}{3}2^n + v_0 2^{-n}$. En exploitant le premier terme, on trouve

$$0 = u_0 = \frac{2}{3} + v_0 \implies v_0 = -\frac{2}{3}.$$

La solution du second système est donc donnée par

$$u_n = \frac{2}{3} \left(2^n - \frac{1}{2^n} \right).$$

Remarque I.5.6. Si u^* et v^* sont solutions particulières des équations

$$u_{n+1} = au_n + g_1(n) \quad \text{et} \quad u_{n+1} = au_n + g_2(n),$$

respectivement. Alors, $u^* + v^*$ est solution particulière de

$$u_{n+1} = au_n + g_1(n) + g_2(n)$$

Exercice E. 10 ( , ). Résoudre le système

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n/2 + n^2 - n + 2^n. \end{cases}$$

Solution E. 10. On reprend les notations de l'Exercice 10. Une solution de notre équation est de la forme

$$u_n = u_n^* + u_n^{**} + v_n = 2n^2 - 10n + 16 + \frac{2^{n+1}}{3} + v_0 2^{-n}$$

On détermine v_0 en exploitant le premier terme :

$$0 = u_0 = 16 + \frac{2}{3} + v_0 \implies v_0 = -\frac{50}{3}.$$

On en déduit la forme de notre solution

$$u_n = 2n^2 - 10n + 16 + \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{50}{3} 2^{-n}.$$

5.2 Le second ordre

Cette sous-section est en soit assez similaire à la sous-section précédente tout en étant d'un point de vu calculatoire un peu plus compliquée.

Définition I.5.7. On dit qu'une suite u est *récurrente linéaire du second ordre* si elle satisfait une équation de la forme

$$(E) \quad u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = g(n), \quad n \in \mathbb{N},$$

où $b, c \in \mathbb{R}^*$. On appelle la partie $g(n)$ le *second membre*. On appelle *équation homogène* associée à (E), l'équation

$$(E_h) \quad v_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

L'équation caractéristique associée est

$$(EC) \quad r^2 + br + c = 0$$

Remarque I.5.8. Les Équations (E) et (E_h) ont une infinité de solutions lorsque les deux premiers termes ne sont pas fixés. Si ils sont fixés, il existe au contraire une unique solution.

Théorème I.5.9. Si u^* est une solution particulière de (E) et v une solution générale de (E_h), alors $u = u^* + v$ est une solution générale de (E).

Méthodologie I.5.10 (Profil d'une suite récurrente du second ordre). On cherche les suites u vérifiant une équation de la forme (E). On note Δ le déterminant de (EC).

1. On cherche les solutions générales de (E_h).

- (a) Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique (EC) a deux solutions distinctes r_1 et r_2 . Une solution générale de (E_h) est alors donnée par

$$v_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n,$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- (b) Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique (EC) a une solution double r_0 . Une solution générale de (E_h) est alors donnée par

$$v_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n = r_0^n (\lambda + \mu n),$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. On cherche une solution particulière de (E).

- (a) Si $g = P$ est un polynôme, on sera face à trois cas.

- i. Si 1 n'est pas racine de (EC), une solution particulière est de la forme $u_n^* = Q(n)$ où Q est un polynôme de même degré que P .
- ii. Si 1 est racine simple de (EC), une solution particulière est de la forme $u_n^* = nQ(n)$ où Q est un polynôme de même degré que P .
- iii. Si 1 est racine double de (EC), une solution particulière est de la forme $u_n^* = n^2Q(n)$ où Q est un polynôme de même degré que P .

- (b) Si g est de la forme $g(n) = Ct^n$ pour deux réels C, t . On a encore trois cas.

- i. Si t n'est pas racine de (EC), une solution particulière est de la forme $u_n^* = kt^n$ pour un certain $k \in \mathbb{R}$.
- ii. Si t est racine de (EC), une solution particulière est de la forme $u_n^* = knt^n$ pour un certain $k \in \mathbb{R}$.
- iii. Si t est racine double de (EC), une solution particulière est de la forme $u_n^* = kn^2t^n$ pour un certain $k \in \mathbb{R}$.

Remarque I.5.11. Le cas $\Delta < 0$ dépasse le cadre de ce cours.

Remarque I.5.12. Ce point méthode n'est pas à savoir par cœur et sera souvent rappelé en examen.

Exercice E. 11 ( , ). Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 0 \\ u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 3 \cdot 5^n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = u_1 = 0 \\ u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 2n^2 - 1 \end{cases}$$

Solution E. 11. L'équation caractéristique du premier système est donnée par

$$r^2 - 5r + 6,$$

dont les racines sont 2 et 3, les solutions homogènes sont donc de la forme

$$v_n = \lambda 2^n + \mu 3^n.$$

Puisque 5 n'est pas racine du polynôme caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $u_n^* = k5^n$. En exploitant la relation de récurrence on a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n &= 3 \cdot 5^n \\ \iff \forall n \in \mathbb{N}, k5^{n+2} - 5k5^{n+1} + 6k5^n &= 3 \cdot 5^n \\ \iff 6k &= 3 \iff k = 1/2. \end{aligned}$$

La solution générale est de la forme $u_n = u_n^* + v_n$. On évalue en $n = 0$ et $n = 1$ pour déterminer μ et ν .

$$\begin{cases} u_0 = u_0^* + v_0 \\ u_1 = u_1^* + v_1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = 5^0/2 + \lambda 2^0 + \mu 3^0 \\ 0 = 5^1/2 + \lambda 2^1 + \mu 3^1 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 = \lambda + \mu \\ -5 = 4\lambda + 6\mu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \mu = -1/2.$$

La solution est donc donnée par

$$u_n = \frac{5^n - 2^n - 3^n}{2}.$$

L'équation caractéristique du second système est la même, les solutions homogènes sont donc les mêmes de la forme

$$v_n = \lambda 2^n + \mu 3^n.$$

Puisque 1 n'est pas racine de $P(X) = 2X^2 - 1$, on cherche une solution particulière de la forme $u_n^* = an^2 + bn + c$, en exploitant la relation de récurrence, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 2n^2 - 1 &= u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n \\ &= a(n+2)^2 + b(n+2) + c - 5(a(n+1)^2 + b(n+1) + c) \\ &\quad + 6(an^2 + bn + c) \\ &= 2an^2 + (-6a + 2b)n - a - 3b + 2c \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\begin{cases} 2a &= 2 \\ 2b - 6a &= 0 \\ -a - 3b + 2c &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= 3 \\ c &= 9/2. \end{cases}$$


La solution générale est de la forme $u_n = u_n^* + v_n$. On évalue en $n = 0$ et $n = 1$ pour déterminer μ et ν .

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_0 &= u_0^* + v_0 \\ u_1 &= u_1^* + v_1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 &= 9/2 + \lambda 2^0 + \mu 3^0 \\ 0 &= 17/2 + \lambda 2^1 + \mu 3^1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= -9/2 \\ 2\lambda + 3\mu &= -17/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= -5 \\ \mu &= 1 - 1/2. \end{cases} \end{aligned}$$

La solution est donc donnée par

$$u_n = \frac{6n^2 - 3n + 5 + 2 \cdot 3^n - 7 \cdot 2^n}{9}$$

6 Exercices

Exercice E. 12 ( **Récurrence classique**). Montrer les assertions suivantes par récurrence.

1. Pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 + 2 + \dots + n := \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 := \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Pour tout entier $n \geq 3$:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} := \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} < 1.$$

4. Pour tout entier $n \geq 2$ et tous réels strictement positifs a_1, \dots, a_n :

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_n) > 1 + a_1 + \dots + a_n.$$

Solution E. 12. 1. Pour tout $n \geq 1$, notons $\mathcal{P}(n)$ l'assertion $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Initialisation. L'assertion $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque l'on a

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

- Hérédité. Supposons que l'assertion $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \geq 1$. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= n+1 + \sum_{k=1}^n k \\ &= n+1 + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} \\ &= \frac{2n+2 + n^2+n}{2} \\ &= \frac{n^2+3n+2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

où l'on aura utilisé l'hypothèse de récurrence lors du passage de la première à la deuxième ligne. Cela montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion. On a montré par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Pour tout $n \geq 1$, notons $\mathcal{H}(n)$ l'assertion $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

- Initialisation. L'assertion $\mathcal{H}(1)$ est vraie puisque l'on a d'une part

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1,$$

et d'autre part

$$\frac{1(1+1)(2 \times 1+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1.$$

- Hérédité. Supposons que l'assertion $\mathcal{H}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \geq 1$. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)[6(n+1) + n(2n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)[6n+6+2n^2+n]}{6} \\ &= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

où l'on aura utilisé l'hypothèse de récurrence lors du passage de la première à la deuxième ligne. Cela montre que $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion. On a montré par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Pour tout $n \geq 2$, notons $S_n := \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Il s'agit donc de montrer que $S_n < 1$ pour tout $n \geq 3$. Commençons par remarquer que le résultat est vrai au rang 3 car

$$S_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{4 \times 5 + 3 \times 5 + 3 \times 4 + 2 \times 5}{3 \times 4 \times 5} = \frac{57}{60} < 1.$$

Supposons maintenant que $S_n < 1$ pour un certain $n \geq 3$. On a alors,

$$\begin{aligned} 1 - S_{n+1} &> S_n - S_{n+1} \\ &= \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2(n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right) \\ &> 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence.

4. On se fixe deux réels strictement positifs a_1 et a_2 . Remarquons alors que

$$(1+a_1)(1+a_2) = 1 + a_1 + a_2 + a_1a_2 = 1 > 1 + a_1 + a_2.$$

Ce qui montre l'assertion au rang $n = 2$. Supposons maintenant qu'on ait l'assertion à un rang $n \geq 2$. Fixons maintenant $a_1, \dots, a_{n+1} > 0$ et calculons

$$(1+a_1)\dots(1+a_{n+1}) = (1+a_1)\dots(1+a_n)(1+a_{n+1})$$

$$\begin{aligned} &> (1 + a_1 + \dots + a_n)(1 + a_{n+1}) \\ &\geq 1 + \dots + a_{n+1}, \end{aligned}$$

ce qui montre l'assertion au rang $n + 1$. On a bien le résultat demandé par récurrence.

Exercice E. 13 (🎓 Suites). 1. Soit u la suite définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n - 1.$$

Montrer que $u_n = 2^{n+1} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.

3.

Solution E. 13. 1. Le résultat au rang 1 est immédiat puisque $2^{0+1} + 1 = 2^1 + 1 = 3 = u_0$. Supposons l'égalité à un rang $n \in \mathbb{N}$. On a alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - 1 = 2(2^{n+1} + 1) - 1 \\ &= 2^{n+2} + 2 - 1 = 2^{n+2} + 1. \end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence.

Exercice E. 14 (🦋 La suite de Fibonacci). On définit la suite de Fibonacci comme suit :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Montrer par récurrence les formules suivantes.

1. $F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n := \sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1, n \geq 0$.
2. $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} := \sum_{k=1}^n F_{2k-1} = F_{2n}, n \geq 0$.
3. $F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n} := \sum_{k=1}^n F_{2k} = F_{n+1} - 1, n \geq 0$.
4. $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n, n \geq 0$.

Solution E. 14.

Exercice E. 15 (📖). Soit u la suite définie

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \ln(1 + u_n).$$

1. Après avoir étudié le sens de variation de la fonction

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1 + x) - x. \end{cases}$$

Montrer que l'on a

$$0 < \ln(1 + x) < x, \quad x > 0.$$

2. Montrer que tous les u_n sont strictement positifs.

3. Dédurre que u converge.

Solution E. 15. 1. Commençons par remarquer que la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ est strictement croissante³, on en déduit directement que pour tout $x > 0$:

$$\ln(1 + x) > \ln(1 + 0) = \ln(1) = 0.$$

3. sa dérivée est donnée par $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ qui est strictement positive sur \mathbb{R}_+ .

Ce qui montre la première inégalité. Pour la seconde, étudions la fonction g . Sa dérivée est donnée par

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1 - (1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x} < 0.$$

Cela montre que la fonction g est strictement décroissante, on en déduit pareillement que pour tout $x > 0$:

$$\ln(1+x) - x = g(x) < g(0) = 0,$$

d'où la seconde inégalité.

2. u_0 est évidemment strictement positif. Supposons que l'on ait $u_n > 0$, alors en utilisant la question précédente, on a

$$u_{n+1} = \ln(1 + u_n) > 0.$$

Ce qui montre que les u_n sont positifs par récurrence.

3. Remarquons qu'il suit de la Question 1 que la suite u est décroissante puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} = \ln(1 + u_n) < u_n.$$

La suite u est alors décroissante et minorée (par zéro car positive) et est donc convergente.

Remarquons que l'on peut calculer sa limite $\ell \in \mathbb{R}_+$. En effet, sa limite satisfait l'équation

$$\ell = \ln(1 + \ell).$$

On peut ensuite voir que l'unique solution est $\ell = 0$.

Matrices

1 Introduction aux matrices

Définition II.1.1. Soit deux entiers $n, p \geq 1$. On appelle *matrice* (réelle) de taille $n \times p$ un tableau à n lignes et p colonnes dont les entrées sont des réels. On note souvent $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{np}$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$. Un élément A de \mathcal{M}_{np} est donc de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

où a_{ij} désigne le coefficient à la i -ème ligne et j -ème colonne de A .

L'ensemble \mathcal{M}_{np} a une structure d'espace vectoriel. En particulier, il a une addition définie par

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}$$

et une multiplication externe définie par

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}.$$

Une matrice qui a le même nombre de lignes et de colonnes est dite *carrée*.

Exercice E. 16 (☐). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -9 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A + B$.
2. Calculer $2A$.
3. Calculer $A - B/2$.

Solution E. 16. 1.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 - 4 & 0 - 2 & 2 + 0 \\ -9 + 0 & 5 + 2 & -1 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -9 & 7 & -7 \end{pmatrix}.$$

2.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 0 & 2 \times 2 \\ 2 \times (-9) & 2 \times 5 & 2 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -18 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

3.

$$A - \frac{B}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -9 & 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -9 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Définition II.1.2. Soit trois entiers $m, n, p \geq 1$ et deux matrices $A \in \mathcal{M}_{mn}, B \in \mathcal{M}_{np}$. On définit la matrice produit AB comme suit :

$$C = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{kp} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{nk} b_{kp} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mp}.$$

Autrement dit, les coefficients de la matrice $C = AB$ sont donnés par la formule

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p.$$

Remarque II.1.3. En d'autres termes, on peut multiplier A par B si et seulement si A a le même nombre de colonnes que B a de lignes. Il en découle que le produit AB peut être bien défini sans pour autant pouvoir définir le produit BA .

A Si A et B sont deux matrices carrées de mêmes tailles, on peut définir les deux produits AB et BA . Notons que ces produits ne coïncident pas forcément. Autrement dit, il est possible de trouver des matrices A et B telles que $AB \neq BA$.

Exercice E. 17 (🐞). Montrer qu'il y a correspondance entre produit matriciel et composition des applications linéaires.

Solution E. 17.

Proposition II.1.4. Le produit matriciel est *associatif* et *distributif* à gauche et à droite – i.e. on a

$$A(BC) = (AB)C, \quad A(B + C) = AB + AC \quad \text{et} \quad (A + B)C = AC + BC,$$

lorsque les produits matriciels sont bien définis.

Définition II.1.5. Soit $A \in \mathcal{M}_{np}$ une matrice $n \times p$. On définit la matrice *transposée* de A comme étant la matrice ${}^tA \in \mathcal{M}_{pn}$ dont les coefficients sont donnés par

$${}^t a_{ij} = a_{ji}, \quad 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n.$$

Exercice E. 18 (📖). Donner les transposées des matrices suivantes.

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Solution E. 18. 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Cette matrice coïncide avec sa transposée, on dit que c'est une matrice *symétrique*.

Proposition II.1.6. On a les formules

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB, \quad {}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA \quad \text{et} \quad {}^t({}^tA) = A,$$

lorsque les matrices sont bien définies.

Définition II.1.7. Soit $A \in \mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{nn}$ une matrice carrée. On appelle *trace* de la matrice A la somme des coefficients diagonaux :

$$\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$


Exercice E. 19 (). Donner la trace de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Solution E. 19. La trace est $1 + 0 + 12 = 13$.

Proposition II.1.8. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n$ deux matrices carrés et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. Alors, on a les formules :

- $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr } A + \text{Tr } B$;
- $\text{Tr}(\lambda A) = \lambda \text{Tr } A$;
- $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Exercice E. 20 (). Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

Solution E. 20. On calcule

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Les traces sont toutes deux égales à 6 et coïncident donc bien.

2 Inversion d'une matrice

2.1 Définition

Définition II.2.1. On appelle *matrice identité* de taille $n \times n$, la matrice dont toutes les entrées sont nulles sauf les coefficients sur la diagonale qui sont tous égaux à 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n.$$

Proposition II.2.2. La matrice identité agit comme un élément neutre pour le produit matriciel :

$$I_n \cdot A = A = A \cdot I_n, \quad A \in \mathcal{M}_n.$$

Définition II.2.3. Soit $A \in \mathcal{M}_n$ une matrice carrée. On dit que A est *inversible* s'il existe $B \in \mathcal{M}_n$ telle que

$$AB = I_n = BA.$$

On dit alors que B est l'*inverse* de A et l'on note $B = A^{-1}$.

Exercice E. 21. Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $2A - A^2$ et déduire que A est inversible et expliciter son inverse.
2. Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x + y &= 3 \\ -x + 4y &= 6. \end{cases}$$

Solution E. 21. 1. En calculant, on trouve $2A - A^2 = I_2$. On en déduit que $A(2I_2 - A) = I_2 = (2I_2 - A)A$ et donc A est inversible et l'inverse est donné par

$$A^{-1} = 2I_2 - A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. On exploite maintenant la question précédente :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y &= 3 \\ -x + 4y &= 6. \end{cases} &\iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &\iff \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &\iff A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x &= 2/3 \\ y &= 5/3. \end{cases} \end{aligned}$$

2.2 Critère d'inversion

Définition II.2.4. Soit $A \in \mathcal{M}_{np}$ une matrice $n \times p$. Le *rang* de A (noté $\text{rg}(A)$ ou $\text{rang}(A)$) est le rang de la famille des vecteurs colonnes (ou lignes) de A . Autrement dit, il s'agit de la taille de la famille libre maximale constituée de colonnes (ou de lignes) de A .

Proposition II.2.5. Soit $A \in \mathcal{M}_n$ une matrice carrée. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) A est inversible.
- (ii) $\det A \neq 0$.
- (iii) Les colonnes (ou lignes) de A forment un système libre.

(iv) $\text{rg } A = n$.

Exercice E. 22. Déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

Solution E. 22. Donnons deux méthodes.

- Un bon outil est de calculer son déterminant :

$$\det A = 0 + 0 + 9 - (0 + 0 + 0) = 9 \neq 0,$$

donc la matrice est inversible.

- On peut également revenir à la définition en montrant que la famille (C_1, C_2, C_3) composée de ses colonnes est libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = 0$. On a alors le système suivant :

$$\begin{cases} -2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Le système des colonnes est donc libre – ce qui montre que la matrice est inversible.

Exercice E. 23. Donner le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solution E. 23. Notons C_j ($1 \leq j \leq 4$) la j -ème colonne de A . Notons que $C_4 = C_1 + C_2$ de sorte que $\text{rg } A < 4$. On va montrer que son rang est égal à trois. Il suffit à présent de voir que la famille $\{C_1, C_2, C_3\}$ est libre. Soit λ_1, λ_2 et λ_3 trois scalaires tels que $C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + C_3\lambda_3 = 0$. On a alors

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ 5\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 7\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

On en déduit que la famille est libre, d'où le résultat annoncé.

Proposition II.2.6. On a les formules

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \text{et} \quad {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1},$$

lorsque les matrices sont bien définies. Ainsi, puisqu'il n'y a pas de différence entre $({}^tA)^{-1}$ et ${}^t(A^{-1})$, on se permettra d'écrire ${}^tA^{-1}$ (l'ordre dans lequel on opère l'inverse et la transposée n'a pas d'importance).

3 Coordonnées

3.1 Changement de base

Définition II.3.1. Soit E un espace vectoriel (réel) et (e_1, \dots, e_n) une famille de vecteurs de E . On dit que (e_1, \dots, e_n) est une *base* de E si la famille vérifie les conditions :

- (i) la famille (e_1, \dots, e_n) est *libre* – i.e. pour tous scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$, on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
- (ii) la famille (e_1, \dots, e_n) est *génératrice* – i.e. tout vecteur v de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des e_i , autrement dit, il est de la forme $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Exemple II.3.2. On appelle *base canonique* de \mathbb{R}^n la base (e_1, \dots, e_n) où e_j est le vecteur qui n'a que des zéros en entrées sauf au j -ème argument qui vaut 1. Par exemple, $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Proposition II.3.3. Toute base d'un espace vectoriel E a la même *taille* (nombre de vecteurs), on appelle ce nombre la *dimension* de E et on le note $\dim E$.

Exemple II.3.4. $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Proposition II.3.5. Soit \mathfrak{b} une famille de vecteurs d'un espace vectoriel. La famille \mathfrak{b} est une base si et seulement si deux des assertions suivantes sont vérifiées :

- (i) La famille \mathfrak{b} est libre.
- (ii) La famille \mathfrak{b} est génératrice.
- (iii) Le nombre de vecteurs dans la famille \mathfrak{b} est égal à la dimension de E .

Remarque II.3.6. Ce que dit la proposition précédente, c'est qu'il suffit de ne vérifier que deux des trois assertions afin de s'assurer qu'une famille est une base.

Exercice E. 24. Montrer que la famille $\mathfrak{b} = ((3, 2), (1, 1))$ est une base de \mathbb{R}^2 .

Solution E. 24. Soit deux réels λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1(3, 2) + \lambda_2(1, 1) = (0, 0)$. On a alors le système

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Le système est donc libre et contient 2 éléments (et est donc égal à la dimension de \mathbb{R}^2), il s'agit bien d'une base.

On aurait aussi pu voir que le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0,$$

est non-nul ce qui entraîne la liberté de la famille. La conclusion est identique.

Définition II.3.7. Soit $\mathfrak{b} = (e_1, \dots, e_n)$ la base d'un espace vectoriel E et v un vecteur de E . Par définition, on peut écrire de façon unique v comme combinaison linéaire des e_i :

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

On dit alors que v a pour *coordonnées* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans la base \mathfrak{b} et on dit que $V = {}^t(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est le *vecteur colonne* de v dans \mathfrak{b} .

Exercice E. 25. On note \mathfrak{b} et \mathfrak{b}' les bases canonique et $((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ respectivement dans \mathbb{R}^3 .

1. Donner les coordonnées de $(1, 2, 3)$ dans la base \mathfrak{b} .
2. Donner les coordonnées de $(1, 2, 3)$ dans la base \mathfrak{b}' .

Solution E. 25. 1. Le vecteur $(1, 2, 3)$ a pour coordonnées $(1, 2, 3)$ dans la base canonique.

2. Il n'est pas difficile de voir que l'on a

$$(1, 2, 3) = 1(1, 1, 1) + 1(0, 1, 1) + 1(0, 0, 1).$$

Ainsi, les coordonnées de $(1, 2, 3)$ dans la base \mathfrak{b}' sont $(1, 1, 1)$.

Définition II.3.8. Soit $\mathfrak{b} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathfrak{b}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un même espace vectoriel E . On peut exprimer les vecteurs de la base \mathfrak{b}' dans la base \mathfrak{b} . On écrit alors

$$e'_j = p_{1j}e_1 + \dots + p_{nj}e_n, \quad 1 \leq j \leq n.$$

La matrice $P := P_{\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{b}'} = (p_{ij})_{ij}$ est alors appelé la matrice de *changement de base* de \mathfrak{b} à \mathfrak{b}' . On peut récapituler sa construction ainsi :

$$\begin{array}{c|ccc} & e'_1 & \dots & e'_n \\ \hline e_1 & p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_n & p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{array}$$

Exemple II.3.9. On se donne deux bases de \mathbb{R}^3 à savoir $\mathfrak{b} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique et $\mathfrak{b}' = (e'_1 = (1, 2, 3), e'_2 = (0, 1, 2), e'_3 = (1, 1, 1))$. La matrice de changement de base de \mathfrak{b} à \mathfrak{b}' est donnée par

$$\begin{array}{c|ccc} & e'_1 & e'_2 & e'_3 \\ \hline e_1 & 1 & 0 & 1 \\ e_2 & 2 & 1 & 1 \\ e_3 & 3 & 2 & 1 \end{array} \quad e'_2 = 0e_1 + 1e_2 + 2e_3.$$

Exercice E. 26. On se donne deux bases de \mathbb{R}^2 , à savoir $\mathfrak{b} = ((1, 1), (2, 3))$ et $\mathfrak{b}' = ((1, 2), (2, 1))$. Exprimer la matrice de changement de base de \mathfrak{b} à \mathfrak{b}' .

Solution E. 26. Il suit d'un calcul que l'on a

$$(1, 2) = -1(1, 1) + 1(2, 3) \quad \text{et} \quad (2, 1) = 4(1, 1) - 1(2, 3).$$

On en déduit la matrice de passage demandée

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proposition II.3.10. Soit $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$ et \mathfrak{b}'' trois bases d'un même espace vectoriel E et x un vecteur de E dont on note X et X' ses vecteurs colonnes dans les bases \mathfrak{b} et \mathfrak{b}' respectivement. On a les assertions suivantes :

- (i) $X = P_{\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{b}'} X'$.
- (ii) $P_{\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{b}'}^{-1} = P_{\mathfrak{b}' \rightarrow \mathfrak{b}}$.
- (iii) $P_{\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{b}'} P_{\mathfrak{b}' \rightarrow \mathfrak{b}''} = P_{\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{b}''}$.

3.2 Matrices semblables

3.3 Applications linéaires

Définition II.3.11. Soit E, F deux espaces vectoriels, $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, $\mathfrak{b} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathfrak{c} = (e'_1, \dots, e'_n)$ des bases de E et F respectivement. On peut exprimer les vecteurs $f(e_j)$ dans la base \mathfrak{c} . On écrit alors

$$f(e_j) = m_{1j}e'_1 + \dots + m_{nj}e'_n, \quad 1 \leq j \leq p.$$

La matrice $M = \text{Mat}_{bc}(f) = (m_{ij})_{ij}$ est la matrice de f dans les bases b et c . On peut récapituler sa construction ainsi :

$$\begin{array}{c|ccc} & f(e_1) & \dots & f(e_p) \\ \hline e'_1 & m_{11} & \dots & m_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e'_n & m_{n1} & \dots & m_{np} \end{array}$$

Remarque II.3.12. Lorsque f est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans lui-même, muni d'une base b , on appelle alors matrice de f dans la base b la matrice de f dans les bases b et b dans le sens de la définition précédente. On notera alors $\text{Mat}_b(f) = \text{Mat}_{bb}(f)$.

Théorème II.3.13. Soit E, F deux espaces vectoriels, b, b' deux bases de E , c, c' deux bases de F et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On a alors, la formule de changement de bases

$$\text{Mat}_{b'c'}(f) = P_{c \rightarrow c'}^{-1} \text{Mat}_{bc}(f) P_{b \rightarrow b'}.$$

En particulier, si $f : E \rightarrow E$ est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans lui-même et que l'on a deux bases b et b' de E , on a alors la relation

$$\text{Mat}_{b'}(f) = P^{-1} \text{Mat}_b(f) P,$$

où $P = P_{b \rightarrow b'}$ est la matrice de passage de b à b' .

Exercice E. 27. Soit b et c les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 respectivement. On se donne l'application linéaire

$$\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - y + z, x + y - z). \end{cases}$$

1. Donner la matrice de f dans les bases b et c .
2. Soit $b' = ((1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1))$, donner la matrice de f dans les bases b' et c .
3. Soit $c = ((1, 1), (0, 1))$, donner la matrice de f dans les bases b' et c' .

Solution E. 27.

4 Exercices

Exercice E. 28 (🎓). Effectuer les produits matriciels suivants.

1.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^3 .

4. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer la formule

$$X^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Solution E. 28. 1.

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 0 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -6 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Commençons par calculer A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$


On peut maintenant calculer A^3 :

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. La formule est évidente lorsque $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie pour un certain $n \geq 1$. On a alors

$$\begin{aligned} X^{n+1} &= X^n \cdot X = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence.

Exercice E. 29 (). Soit $x \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que l'on a

$$X^n = \begin{pmatrix} 1 & nx & \frac{n(n-1)}{2}x^2 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Solution E. 29. L'égalité est évidente lorsque $n = 0$ puisque $X^0 = I_3$. Supposons que l'on ait l'égalité pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\begin{aligned} X^{n+1} &= X^n \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & nx & \frac{n(n-1)}{2}x^2 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x + nx & nx^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \\ 0 & 1 & x + nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 1 & x + nx & \left(n + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right)x^2 \\ 0 & 1 & x + nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & x + nx & \left(\frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}\right)x^2 \\ 0 & 1 & x + nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & x + nx & \frac{(n+1)n}{2}x^2 \\ 0 & 1 & x + nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence.

Exercice E. 30 (). Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution E. 30. Il y a de très nombreuses manières de déterminer le rang d'une matrice. Nous en présenterons dans cette solution un grand nombre.

- Première méthode. Un calcul immédiat permet de voir que $\det A = 1 \times 2 - 3 \times 0 = 2 \neq 0$. Ainsi, le rang de A est égal à 2.

Deuxième méthode. Les deux colonnes de A ne sont clairement pas proportionnelles (et forment donc une famille libre), ainsi $\text{rg } A = 2$.

- Première méthode. On calcule le déterminant, $\det B = -1 \neq 0$, donc le rang de B est 3.

Deuxième méthode. On utilise la méthode de Gauss (pour les matrices) i.e. on échelonne (sans forcément réduire) la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le rang est donc égal à 3.

- Première méthode. On calcule le déterminant, $\det C = 0$, ainsi $\text{rg } C \leq 2$. Ensuite, pour continuer l'étude, on a plusieurs options :

- On peut dire que les deux premières colonnes de la matrice sont clairement non-proportionnelles et forment une famille libre. On en déduit que $\text{rg } C \geq 2$ puis $\text{rg } C = 2$.
- On peut trouver un sous-déterminant non-nul de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le sous-déterminant est égal à $2 \neq 0$, d'où $\text{rg } C \geq 2$, puis $\text{rg } C = 2$.

Deuxième méthode. On utilise la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $\text{rg } C = 2$.

- Première méthode. Notons C_j ($1 \leq j \leq 4$) la j -ème colonne de D . Remarquons que l'on a $C_4 = C_1 + C_2$, on a donc $\text{rg } D \leq 3$ (on peut oublier C_4). De la même manière, $C_3 = C_2$, on a donc $\text{rg } D \leq 2$ (on peut oublier C_3). On veut maintenant voir que le rang est exactement 2. Pour cela, il faut voir que $\{C_1, C_2\}$ est une famille libre. Voyons trois façons de procéder.

- On peut dire qu'il est évident que ces deux colonnes sont non-proportionnelles.
- On peut exhiber un sous-déterminant (de taille 2 puisque l'on veut voir que $\text{rg } D \geq 2$).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$


cette sous matrice a déterminant $1 \neq 0$, ce qui permet de conclure.

- On revient à la définition de la liberté. Soit deux scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$. Alors en exploitant les deux premières coordonnées, on a $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$, ce qui montre que la famille est libre.

Deuxième méthode. Encore une fois, la méthode de Gauss

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3, L_4]{L_1=L_3=L_4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\cancel{C_1}, \cancel{C_3}]{C_2=C_3, C_1+C_2=C_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où $\text{rg } C = 2$.

Exercice E. 31 (). Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 = 0$ et en déduire une expression explicite de A^{-1} .

Solution E. 31. On commence par calculer récursivement les matrices $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 12 & -6 \\ -6 & 13 & -6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

et $A^3 = \begin{pmatrix} -13 & 30 & -18 \\ -14 & 31 & -18 \\ -7 & 16 & -10 \end{pmatrix}$. On calcule ensuite

$$\begin{aligned} A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 &= \begin{pmatrix} -13 & 30 & -18 \\ -14 & 31 & -18 \\ -7 & 16 & -10 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -5 & 12 & -6 \\ -6 & 13 & -6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -13 & 30 & -18 \\ -14 & 31 & -18 \\ -7 & 16 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -24 & 12 \\ 12 & -26 & 12 \\ 6 & -12 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -6 & 6 \\ 2 & -7 & 6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3. \end{aligned}$$

Ensuite, en exploitant l'égalité que l'on vient d'établir, on a

$$A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 = 0 \implies -\frac{A^3}{2} + A^2 + \frac{A}{2} = I_3$$

$$\implies \begin{cases} A \left(-\frac{A^2}{2} + A + \frac{I_3}{2} \right) = I_3 \\ \left(-\frac{A^2}{2} + A + \frac{I_3}{2} \right) A = I_3 \end{cases}$$

On en déduit que $A^{-1} = -\frac{A^2}{2} + A + \frac{I_3}{2}$. On peut s'amuser à calculer l'inverse, on trouve alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 2 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice E. 32. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et si oui, donner l'inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution E. 32. Un calcul direct permet de voir que $\det A = 0$, $\det B = 1$ et $\det C = 1$. Ainsi, B et C sont les seules matrices inversibles.

Commençons par chercher l'inverse de B , pour se faire, on construit un système linéaire traduisant la matrice B :

$$\begin{cases} 2x + 1y + 0z = a \\ 1x + 1y + 0z = b \\ 1x + 0y + 1z = c \end{cases}$$

La résolution de ce système nous permettra de voir apparaître la matrice inverse.

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ x + y = b \\ x + z = c \end{cases} \implies \begin{cases} x = a - b \\ (a - b) + y = b \\ (a - b) + z = c \end{cases} \implies \begin{cases} x = a - b \\ y = -a + 2b \\ z = -a + b + c \end{cases}$$

Il nous reste à lire le système résolu pour déduire la matrice inverse.

$$\begin{cases} x = 1a + -1b + 0c \\ y = -1a + 2b + 0c \\ z = -1a + 1b + 1c \end{cases} \implies B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On procède de même pour la matrice C .

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ y + z = b \\ z = c \end{cases} \implies \begin{cases} x = a - b \\ y = b - c \\ z = c \end{cases} \implies C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analyse à plusieurs variables

1 Fonctions à plusieurs variables

1.1 Dérivées partielles premières

Définition III.1.1.

2 Optimisation

2.1 Extrema d'une fonction à une variable

Définition III.2.1. Soit $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f admet un *maximum* (resp. *minimum*) en $x_0 \in U$ sur un intervalle $I \subset U$ si

$$x_0 \in I \quad \text{et} \quad \forall x \in I, \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \text{resp.} \quad f(x) \geq f(x_0).$$

On dira que x_0 est un *maximum* (resp. *minimum*) *local* s'il existe un intervalle $I \subset U$ sur lequel x_0 est un maximum (resp. minimum). On dira que x_0 est un *extremum local* si c'est un maximum ou minimum local.

Théorème III.2.2. Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

- (i) Si x_0 est un extremum local, alors $f'(x_0) = 0$.
- (ii) Réciproquement, si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors x_0 est un extremum local. Plus précisément, si f' passe de positif à négatif (resp. négatif à positif), il s'agit d'un maximum (resp. minimum) local.

Exercice E. 33 (☒). Montrer que la réciproque de l'item (i) du théorème précédent n'est pas vraie en générale.

Solution E. 33. Il suffit de considérer le point $x_0 = 0$ pour la fonction $x \mapsto x^3$.

Théorème III.2.3. Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

- (i) Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$, alors x_0 est un maximum local.
- (ii) Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, alors x_0 est un minimum local.

Exercice E. 34 (☒). Montrer que la réciproque de l'item (i) du théorème précédent n'est pas vraie en général. Pour quelle classe de fonction la réciproque est-elle vraie ?

Solution E. 34.

2.2 Optimisation libre

Dans cette sous-section, on s'intéresse aux extrema des fonctions à deux variables. On commence par généraliser les définitions d'extremum dans ce contexte.

On dit qu'une fonction à deux variables $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ atteint un *maximum* (resp. *minimum*) *local* en (x_0, y_0) si nous avons $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ (resp. $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$) pour tout (x, y) dans un voisinage de (x_0, y_0) .

La notion de *voisinage* est assez obscure dans ce cours, d'autant plus que nous n'avons pas les outils pour le définir proprement. On peut néanmoins s'en donner une intuition. Un voisinage de (x_0, y_0) c'est un ensemble de point aussi proche que l'on veut de (x_0, y_0) . Puisque l'on est en 2-dimensions, cela peut être un cercle de rayon quelconque centrée en (x_0, y_0) ou un carré contenant intérieurement (x_0, y_0) .

En pratique, dans le cadre de ce cours, on ne manipulera pas de voisinage. Pour détecter des extrema, on utilisera systématiquement les théorèmes développés le long de cette sous-section.

Définition III.2.4. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle à deux variables différentiable. On dit qu'un couple $(x_0, y_0) \in U$ est un *point stationnaire* s'il annule les dérivées partielles i.e. si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Remarque III.2.5. Il est à noter que de même que pour les fonctions à une variable, les fonctions à deux variables ne sont pas forcément définies sur \mathbb{R}^2 entier. L'ensemble sur lequel une fonction est définie est appelé son *domaine de définition*.

Exercice E. 35. Donner l'ensemble de définition (maximum) de la fonction à deux variables suivantes.

$$f : (x, y) \mapsto \frac{\sqrt{x-y}}{e^x - 1}.$$

Solution E. 35. Notons $D_f \subset \mathbb{R}^2$ le domaine de définition de f . Alors, il est clair que

$$(x, y) \in D_f \iff x - y \geq 0 \quad \text{et} \quad e^x - 1 \neq 0 \iff x \geq y \quad \text{et} \quad x \neq 0.$$

On en déduit que

$$D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y \text{ et } x \neq 0 \right\}.$$

Exercice E. 36. Donner les points stationnaires de la fonction

$$f : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2 - 2y)e^{-x^2}.$$

Solution E. 36. Notons S l'ensemble des points stationnaires de la fonction f .

$$\begin{aligned} (x, y) \in S &\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1 - x^2 - y^2 + 2y)2xe^{-x^2} = 0 \\ (2y - 2)e^{-x^2} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2 - x^2 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc $S = \{(\pm\sqrt{2}, 1)\}$.

Remarque III.2.6. Comme dans le cas unidimensionnel, le fait d'être un point stationnaire ne garantit pas d'être un extremum. Un point stationnaire qui n'est pas un extremum sera appelé *point-selle*.

Exercice E. 37. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 4x - 4y.$$

1. Montrer que f admet un unique point stationnaire (x_0, y_0) .
2. Montrer que $x \mapsto f(x, y_0)$ admet un minimum en x_0 .
3. Montrer que $y \mapsto f(x_0, y)$ admet un maximum en y_0 .
4. Conclure.

Solution E. 37. 1.

2.

Théorème III.2.7. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable deux fois au voisinage d'un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si (x_0, y_0) est un point stationnaire i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

si de plus, nous avons

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) < 0.$$

Alors, (x_0, y_0) est un extremum local. Plus précisément, si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) < 0,$$

il s'agit d'un maximum, si au contraire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0,$$

il s'agit d'un minimum. Autrement, si

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0,$$

il s'agit d'un point-col.

Exercice E. 38. Donner les points stationnaires et catégoriser ces derniers pour la fonction

$$f : (x, y) \mapsto 3x^3 + xy^2 - xy.$$

Solution E. 38. Notons S_f l'ensemble des points stationnaires de f .

$$\begin{aligned} (x, y) \in S_f &\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 9x^2 + y^2 - y = 0 \\ 2xy - x = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 9x^2 + y^2 - y = 0 \\ x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 1/2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 & \text{et} & y = 0 \\ & \text{ou} & \\ y = 1/2 & \text{et} & 9x^2 - 1/4 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 & \text{et} & y = 0 \\ & \text{ou} & \\ y = 1/2 & \text{et} & x = \pm 1/6 \end{cases} \end{aligned}$$

Cela nous donne donc trois points stationnaires, $S_f = \{(0, 0), (\pm 1/6, 1/2)\}$. Calculons à part la quantité

$$\begin{aligned} H_f(x, y) &:= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \\ &= (2y - 1)^2 - 18x \times 2x \\ &= (2y - 1)^2 - 36x^2. \end{aligned}$$

On évalue la précédente fonction sur chacun des points stationnaires

$$H_f(0, 0) = 1 > 0 \quad \text{et} \quad H_f\left(\pm \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) = -1 < 0.$$

D'après le Théorème III.2.7 on sait donc que $(0, 0)$ est un point-col et les points $(\pm 1/6, 1/2)$ sont des extrema. Enfin, remarquons que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) = -3 < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) = 3 > 0.$$

Ainsi, toujours d'après le Théorème III.2.7, $(1/6, 1/2)$ est un maximum et $(-1/6, 1/2)$ est un minimum.

Variations

Cet appendice a pour but de rappeler aux étudiants les éléments nécessaires pour étudier les variations d'une fonction.

1 Polynôme de degré 2

Définition A.1.1. Un *polynôme de degré 2* est une fonction réelle de la forme $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ où a est non-nul. On appelle *discriminant* du dernier polynôme la quantité $\Delta = b^2 - 4ac$. On dit qu'un élément x_0 est une *racine* de P si $P(x_0) = 0$.

Les polynômes (pas seulement ceux de degré 2) sont des fonctions très explicites et dont l'étude est généralement simple – contrairement aux fonctions trigonométriques, logarithmes et exponentielles.

Théorème A.1.2. Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme et Δ son discriminant.

1. Si $\Delta > 0$, alors P a deux racines données par

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. Si $\Delta = 0$, alors P a une racine double donnée par

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

3. Si $\Delta < 0$, alors P n'a pas de racine réelle.

Exercice E. 39. Donner les racines des polynômes suivants.

1. $P(x) = x^2 - 5x + 6$.
2. $P(x) = x^2 - 2x + 1$.
3. $P(x) = x^2 + 1$.

Solution E. 39. 1. $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$. Les deux racines sont donc données par

$$x_{\pm} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}.$$

Soit, $x_- = 2$ et $x_+ = 3$.

2. $\Delta = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$, l'unique racine est donc $x_0 = 2/2 = 1$.

3. $\Delta = 0^2 - 4 = -4 < 0$. Il n'y a pas de racine¹

1. remarquons qu'on pouvait voir qu'il n'y avait pas de racine en inspectant la fonction de plus près : $P(x) = x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

2 Dérivées

Définition A.2.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert non-vide I . On dit que f est *dérivable en* $x_0 \in I$ si la limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe. On note alors cette limite $f'(x_0)$ et on l'appelle la *dérivée* de f en x_0 . On dit que f est *dérivable* si elle l'est en tout ses points.

Théorème A.2.2. La dérivée est linéaire, entre autre si f, g sont deux fonctions dérivables et $\alpha \in \mathbb{R}$ un scalaire, alors on a :

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad \text{et} \quad (\alpha f(x))' = \alpha f'(x).$$

Proposition A.2.3. Le tableau suivant liste de nombreuses fonctions usuelles et donne la formule de la dérivée.

$f(x)$	$f'(x)$
λ	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\ln(u(x))$	$u(x)/u'(x)$
$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$u(x)/v(x)$	$\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

Remarque A.2.4. Notons que dans la formule de la dérivée de x^α , le nombre α peut être totalement quelconque, il peut être négatif et n'est pas non plus obligé d'être entier. On a par exemple, en appliquant la formule :

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}, \quad (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3 Variations

La dérivée d'une fonction est exactement son *taux d'accroissement*. Ainsi, la dérivée donne l'information sur les variations de la fonction mère. En particulier, l'exploitation du signe de la dérivée permet d'étudier la monotonie de la fonction.

Théorème A.3.1. Soit f une fonction dérivable réelle et I un intervalle sur lequel f est définie. Si f' est positive (resp. négative) sur I alors f est croissante (resp. décroissante) sur I .

Exercice E. 40. Étudier les fonctions suivantes (variations, limites, graphe).

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} - x/2 \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x/x. \end{cases}$$

Solution E. 40. On commence par étudier le signe de la dérivée. La fonction f n'est dérivable que sur \mathbb{R}_+^* , soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (1 - \sqrt{x})$$

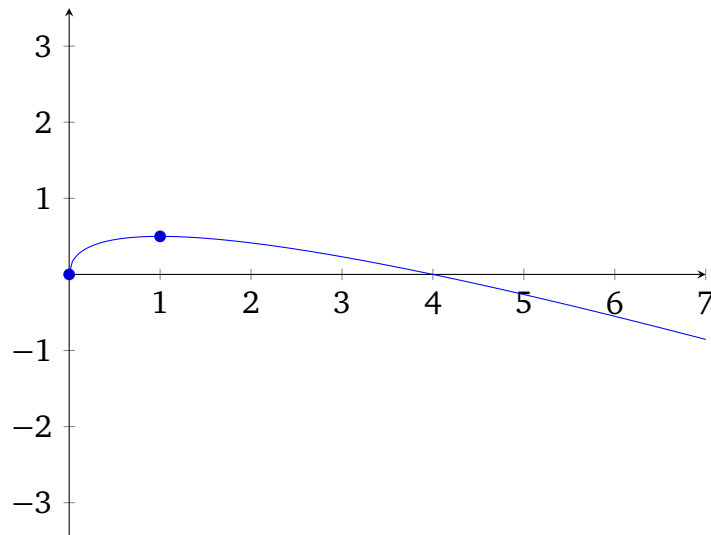
$$\begin{cases} \geq 0 & \text{si } \sqrt{x} \leq 1 \\ \leq 0 & \text{si } \sqrt{x} \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \geq 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \leq 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On peut désormais dresser le tableau de variation de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	\nearrow 1/2	\searrow $-\infty$

On peut désormais dessiner le graphe de la fonction.



On procède de la même manière pour g , soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a

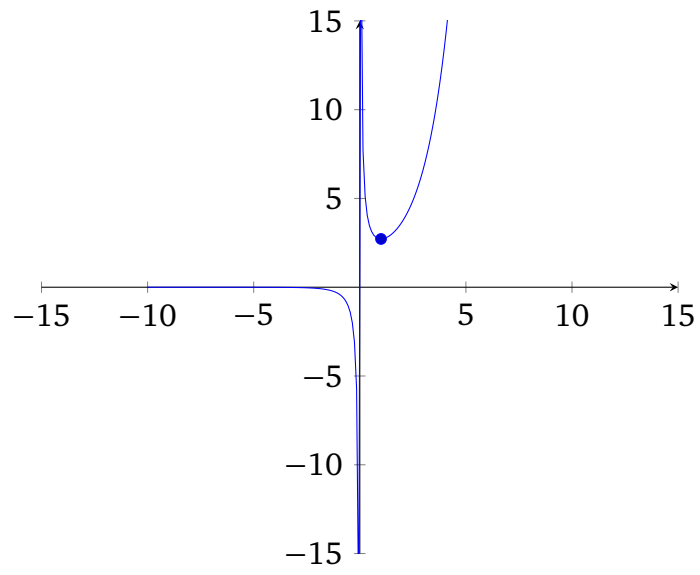
$$g'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x^2} (x - 1) \begin{cases} \leq 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \geq 0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Cela nous permet de dresser le tableau de variations

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+	
$g(x)$	0	\searrow $-\infty$	\nearrow e^1	\nearrow $+\infty$

On peut désormais dessiner le graphe.

3. VARIATIONS



Limites

1 Comparaisons

Définition B.1.1. Soit $a \in [-\infty, \infty]$ un élément potentiellement infini, f et g deux fonctions réelles définies au voisinage de a . On note

$$f(x) \ll_a g(x) \quad \text{ou} \quad f(x) \ll g(x) \quad \text{lorsque } x \rightarrow a,$$

si g domine f au voisinage de a , c'est à dire si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

Remarque B.1.2. Il faut faire attention lorsque l'on compare deux quantités. On compare toujours deux quantités de mêmes signes – on a donc toujours de manière équivalente

$$\frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty.$$

De plus, on fait toujours attention à comparer des termes qui ne s'annule pas au voisinage de a .

Exercice E. 41 (🎓). On se donne $a < b$ deux réels. Comparer au voisinage de l'infini et de zéro les quantités suivantes.

1. x^a et x^b .
2. e^{ax} et e^{bx} .

Solution E. 41. 1. Il est direct de voir que $x^a/x^b = x^{a-b}$ avec $a - b < 0$. Cette quantité tend vers 0 en l'infini et ∞ en zéro, d'où

$$x^a \ll_{\infty} x^b \quad \text{et} \quad x^b \ll_0 x^a.$$

2. Les deux quantités e^{ax} et e^{bx} tendent vers 1 en zéro et ne peuvent donc pas être comparées en ce voisinage. Par contre, il est clair que le rapport $e^{ax}/e^{bx} = e^{(a-b)x}$ tend vers 0 en l'infini. On en déduit

$$e^{ax} \ll_{\infty} e^{bx}.$$

Théorème B.1.3 (de comparaison). Soit $a, b, c > 0$ trois réels strictement positifs. On a les dominations suivantes.

$$\ln(1+x)^a \ll_{\infty} x^b \ll_{\infty} e^{cx}.$$

Exercice E. 42 (🎓). Donner les limites (en l'infini) des suites suivantes :

$$u_n = \frac{4n^3 + 2}{3n + 1}, \quad v_n = \frac{2\sqrt{n}}{\ln(n)} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{e^{\sqrt{n}}}{n^9}.$$

Solution E. 42.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 2}{3n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3}n^2 = \infty; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{\ln(n)} &= \infty; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{n^9} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n})^{18}} = \infty. \end{aligned}$$

2 Développement limités

Le *développement limité* au voisinage de 0 d'ordre $p \geq 1$ d'une fonction f infiniment dérivable s'écrit sous la forme

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \dots + \frac{x^p}{p!}f^{(p)}(0) + x^p\varepsilon(x)$$

où ε est une fonction définie au voisinage de 0 qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Notons que cette écriture n'a un sens qu'au voisinage de 0 et ne devrait donc être exploitée uniquement lors de la détermination de limites¹. À noter que la fonction ε dépend en réalité de f et n'a aucune raison d'être la même d'une fonction à l'autre, on laisse son expression abstraite car l'unique propriété que l'on doit savoir sur celle-ci lorsque l'on étudie une limite c'est que $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$.

On rassemble dans la proposition suivante des développements limités usuels de fonctions que l'on est mené à souvent rencontrer lors de problèmes de limites. À noter que ces développements limités ne sont pas à connaître par cœur (ils seront rappelés pendant les contrôles), il est cependant intéressant de les avoir sous la main lorsque l'on s'entraîne.

Proposition B.2.1 (Développements limités usuels). On a les développements limités :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x); \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x); \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Exercice E. 43 (📖). 1. Donner la limite de la suite $u_n = n^2(\ln(n+1) - \ln(n) - 1/n)$.

2. Donner le développement limité en zéro de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2.

3. En déduire la limite de la suite $v_n = \sqrt{n^4 + n^3} - n^2 - \frac{n}{2}$.

Solution E. 43. 1. On utilise le développement limité de $\ln(1+x)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n} \right)$$

1. cette formule a en réalité bien d'autres usages, mais cela sort du cadre de ce cours.

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon \left(\frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right) \\
 &= n^2 \left(-\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon \left(\frac{1}{n} \right) \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} + \varepsilon \left(\frac{1}{n} \right) \\
 &= -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

2. On applique la formule du développement limité de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = 1/2$.

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x).$$

3. En utilisant la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} v_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^4 + n^3} - n^2 - \frac{n}{2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^4 \left(1 + \frac{1}{n} \right)} - n^2 - \frac{n}{2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - n^2 - \frac{n}{2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon \left(\frac{1}{n} \right) \right) - n^2 - \frac{n}{2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{8} + \varepsilon \left(\frac{1}{n} \right) \\
 &= -\frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

Annales

Examen 2019

Exercice 1 (7 pts)

1. Diagonaliser si possible la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (5 pts)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^3 + 7x^2 + 4x - 4xy + y^2 - 2y$.

1. Chercher les points stationnaires de f et déterminer leur nature.
2. La fonction f passe t-elle par un extremum global ?

Exercice 3 (8 pts)

1. Résoudre

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n/2 + \ln(2)/2. \end{cases}$$

(*Indication* : on pourra chercher une solution particulière sous la forme $u_n^* = C$).

2. Soit v la suite définie par

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \sqrt{2v_n}. \end{cases}$$

- (a) Montrer que l'on a $1 \leq v_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (b)  tudier la monotonie de v .
 - (c) La suite v est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
3. On pose $a_n = \ln v_n$ ($n \in \mathbb{N}$).  crire la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n . En déduire a_n en fonction de n , puis v_n en fonction de n . Retrouver alors le résultat de la Question (2.c).

Solution 1

1. Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$P_A(x) = \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(2-x).$$

On a donc deux valeurs propres **1** et **2**. On résout les systèmes associés.

$$\begin{aligned} AX = 1X &\iff \begin{cases} x+y = x \\ 2y = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases} \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff X \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AX = 2X &\iff \begin{cases} x+y = 2x \\ 2y = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y = y \end{cases} \iff X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff X \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

On a donc

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Par une récurrence immédiate, on a $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On calcule donc

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Solution 2

1. Commençons par déterminer les points stationnaires.

$$\begin{aligned} (x, y) \text{ est un point stationnaire} &\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x^2 + 14x + 4 - 4y = 0 \\ -4x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x^2 + 14x + 4 - 4(2x + 1) = 0 \\ 2x + 1 = y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ 2x + 1 = y \end{cases} \iff \begin{cases} 3x(x + 2) = 0 \\ 2x + 1 = y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in \{0, -2\} \\ y = 2x + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iff (x, y) \in \{(0, 1), (-2, -3)\}.$$

Les points stationnaires sont donc $(0, 1)$ et $(-2, -3)$. Déterminons leur nature.

$$\begin{aligned} D_{(0,1)} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 1) \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 1) \\ &= 16 - 14 \times 2 = -12 < 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{(-2,-3)} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2, -3) \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2, -3) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2, -3) \\ &= 16 - 2 \times 2 = 12 > 0. \end{aligned}$$

Il suit donc que $(0, 1)$ est un extremum local et $(-2, -3)$ est un point col. On peut voir que $(0, 1)$ est un minimum en remarquant que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1) = 14 > 0.$$

2. La fonction n'a pas de maximum local, elle ne peut donc pas espérer avoir de maximum global.
3. La fonction ne peut pas avoir de minimum global car

$$f(x, 0) = x^3 + 7x^2 + 4x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty.$$

Solution 3

1. L'équation homogène est donnée par $v_{n+1} = v_n/2$ dont les solutions sont de la forme $v_n = v_0/2^n$. Cherchons une solution particulière de la forme $u_n^* = C$. La relation de récurrence donne.

$$u_{n+1}^* = \frac{u_n^*}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 \iff C = \frac{C}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 \iff C = \ln 2.$$

La solution particulière est donc donnée par $u_n^* = \ln 2$. La solution générale est de la forme $u_n = v_n + u_n^* = v_0/2^n + \ln 2$. Évaluons en $n = 0$:

$$0 = u_0 = \frac{v_0}{2^0} + \ln 2 = v_0 + \ln 2 \iff v_0 = -\ln 2.$$

La solution générale est finalement donnée par

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \cdot \ln 2.$$

2. (a) Le résultat est évident pour $n = 0$. L'hérédité suit des implications suivantes.

$$\begin{aligned} 1 \leq v_n \leq 2 &\implies 2 \leq 2v_n \leq 4 \implies \sqrt{2} \leq \sqrt{2v_n} \leq \sqrt{4} \\ &\implies 1 \leq v_{n+1} \leq 2. \end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence.

- (b) La croissance de la suite découle des calculs suivants.

$$v_{n+1} - v_n = \sqrt{2v_n} - v_n = \underbrace{\sqrt{v_n}}_{\geq 0} \underbrace{(\sqrt{2} - \sqrt{v_n})}_{\geq 0} \geq 0$$

- (c) La suite v est croissante, majorée donc converge vers une limite ℓ . Elle converge vers un point fixe de la fonction $x \mapsto \sqrt{2x}$. Cherchons les points fixes de cette fonction.

$$x = \sqrt{2x} \iff x - \sqrt{2x} = 0 \iff \sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{2}) = 0 \iff x \in \{0, 2\}.$$

La limite ne peut être que $\ell = 2$ par croissance de la suite car son premier terme est $1 > 0$.

3. On calcule.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \ln v_{n+1} = \ln \sqrt{2v_n} = \ln ((2v_n)^{1/2}) = \frac{1}{2} \ln(2v_n) = \frac{1}{2} \ln v_n + \frac{1}{2} \ln 2 \\ &= \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

De plus, $a_0 = \ln v_0 = \ln 1 = 0$. On en déduit que la suite a est la même que celle du système de la Question (1). On a donc

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \cdot \ln 2.$$

On en déduit

$$v_n = \exp(\ln v_n) = \exp(a_n) = \exp\left[\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \cdot \ln 2\right].$$

On retrouve bien le résultat de la question (2.c) :

$$v_n = \exp\left[\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \cdot \ln 2\right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp[(1 - 0) \cdot \ln 2] = \exp(\ln 2) = 2.$$

Partiel 2 2022

Exercice 1 (3.5 pts)

On se donne la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{x+1}{e^x}.$$

1. Étudier les variations de f .
2. En déduire les extrema locaux et globaux de f .

Exercice 2 (4 pts)

Résoudre

$$\begin{cases} u_0 &= 1/2 \\ u_{n+1} &= 2u_n - 2^n. \end{cases}$$

(Indication : on pourra chercher une solution particulière sous la forme $u_n^* = nK2^n$).

Exercice 3 (4.5 pts)

On se donne l'application linéaire

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, x - y + z, 0), \end{cases}$$

et les vecteurs $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$, $w = (1, 1, 1)$.

1. Donner la matrice de f dans la base canonique \mathcal{B} .
2. Montrer que $\{u, v, w\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .
3. Écrire la matrice de f dans la base $\{u, v, w\}$.

Exercice 4 (8 pts)

Diagonaliser si possible les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution 1

1. La fonction f est bien définie sur \mathbb{R} tout entier. Calculons sa dérivée

$$f'(x) = -xe^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On peut à présent dresser le tableau de signe de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 1$	$\searrow 0$

2. D'après le tableau de signe, 0 est un maximum global, il n'y a aucun autre extremum local.

Solution 2

L'équation homogène est donnée par

$$(EH) \quad v_{n+1} = 2v_n.$$

Les solutions homogènes sont donc de la forme $v_n = v_0 2^n$. Cherchons une solution particulière de la forme

$$u_n^* = nK2^n.$$

Cette solution doit vérifier la relation de récurrence, cela donne :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^* = 2u_n^* - 2^n &\iff \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)K2^{n+1} = 2nK2^n - 2^n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)2K = 2nK - 1 \\ &\iff K = -1/2. \end{aligned}$$

La solution particulière est donc donnée par $u_n^* = -n2^{n-1}$. La solution générale est donc

$$u_n = v_n + u_n^* = v_0 2^n - n2^{n-1}.$$

Il reste à trouver v_0 , ce que l'on fait en évaluant l'équation précédente en $n = 0$:

$$\frac{1}{2} = u_0 = v_0 2^0 - 0 \cdot 2^{-1} = v_0 \implies v_0 = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que la solution générale est donnée par

$$u_n = (1 - n)2^{n-1}.$$

Solution 3

1. La matrice de f dans la base canonique est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Le déterminant est égal à $1 \neq 0$. Il s'agit donc d'une base.

3. Exprimons f en fonction de chacun des vecteurs de la base.

$$\begin{aligned} f(u) &= f(1, 0, 0) = (1, 1, 0) = v \\ f(v) &= f(1, 1, 0) = (1, 0, 0) = u \\ f(w) &= f(1, 1, 1) = (1, 1, 0) = v. \end{aligned}$$

On peut dès lors écrire la matrice de f dans la base $\{u, v, w\}$.

$$\text{Mat}_{\{u,v,w\}}(f) = \begin{array}{c|ccc} & f(u) & f(v) & f(w) \\ \hline u & 0 & 1 & 0 \\ v & 1 & 0 & 1 \\ w & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Solution 4

Commençons par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 7 \\ -2 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(-5 - \lambda) + 14 = (\lambda + 3)(\lambda - 2).$$

Le polynôme a deux solutions -3 et 2 . On résout alors les systèmes $AX = -3X$ et $AX = 2X$:

$$\begin{aligned} AX = -3X &\iff \begin{cases} 4x + 7y = -3x \\ -2x - 5y = -3y \end{cases} \iff x = -y \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\iff X \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AX = 2X &\iff \begin{cases} 4x + 7y = 2x \\ -2x - 5y = 2y \end{cases} \iff 2x = -7y \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2/7 \end{pmatrix} \\ &\iff X \in \left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{où } P = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculons le polynôme caractéristique de B :

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 1 & 0 \\ -4 & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)((-5 - \lambda)(-1 - \lambda) + 4) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = (1 - \lambda)(\lambda + 3)^2. \end{aligned}$$

Les racines sont donc 1 et -3 avec -3 comme valeur propre double. Pour que la matrice soit diagonalisable, il faudrait que l'espace propre associé à -3 soit de dimension 2. Commençons donc par résoudre le système de cette valeur propre.

$$\begin{aligned} BX = -3X &\iff \begin{cases} -5x + y = -3x \\ -4x - y = -3y \\ z = -3z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = 0 \end{cases} \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff X \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

L'espace propre est donc de dimension 1 et la matrice n'est pas diagonalisable.

Examen 2022

Exercice 1 (8 pts)

On se donne la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x - x^2$ et u la suite définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

- Étudier les variations de f .
 - Étudier les extrema locaux et globaux de f .
 - Résoudre l'équation $f(x) = x$.
 - Représenter graphiquement la fonction f .
- Représenter graphiquement la suite u .
 - Étudier la suite u (monotonie, convergence, limite éventuelle).
 - Montrer que $u_n = 1 - 1/2^{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et retrouver les résultats de la question précédente.
 - Reprendre les questions (a) et (b) avec $u_0 = -1$.

Exercice 2 (4 pts)

Diagonaliser si possible la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (4 pts)

On se donne l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \\ (x, y, z) & \longmapsto (-2x + 3z, -x + y + z, -4x + 5z). \end{cases} \mathbb{R}^3$$

1. Donner la matrice M de f dans la base canonique.
2. Soit $u = (1, 0, 0)$, $u' = (1, 1, 1)$, $v = (0, 1, 0)$ et $w = (3, 1, 4)$. Calculer $f(u)$, $f(u')$, $f(v)$, $f(w)$. Donner la matrice de f dans la base $\{u, v, w\}$ puis la matrice de f dans $\{u', v, w\}$.
3. L'application f est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 (4 pts)

On se donne la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto xy + e^x$. Chercher les extrema locaux et globaux de f (indication : $(e^x)' = e^x$ et $e^0 = 1$).

Solution 1

1. (a) Calculons la dérivée de f .

$$f'(x) = 2 - 2x = 2(1 - x).$$

On peut dès lors dresser le tableau de variation de f .

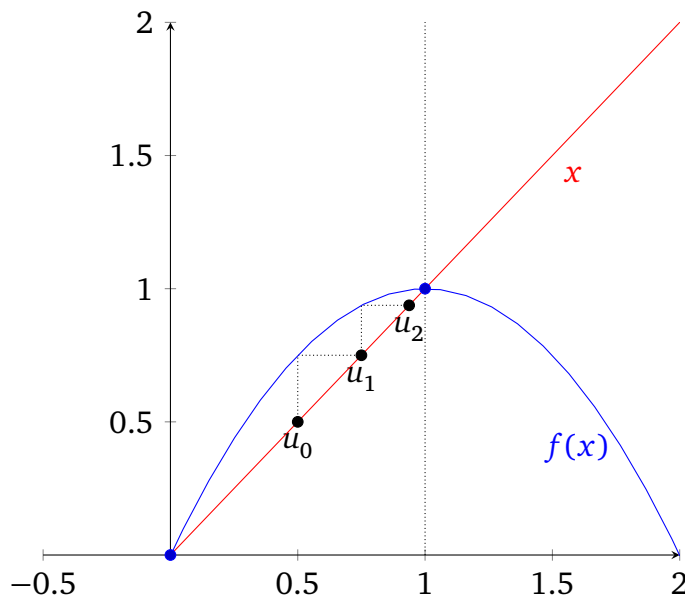
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	$1 \searrow -\infty$

- (b) D'après le tableau de variation, f a un maximum global en 1.
- (c) On résout simplement l'équation.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 2x - x^2 = x \iff x - x^2 = 0 \iff x(1 - x) = 0 \\ &\iff x \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Les points fixes de f sont donc 0 et 1.

- (d) On représente la fonction f ci-dessous.



2. (a) La suite u est déjà représentée sur le graphique précédent.
 (b) On a $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, c'est évident pour $n = 0$ et de plus, par croissance de f sur $[0, 1]$ on a

$$0 \leq u_n \leq 1 \implies f(0) \leq f(u_n) \leq f(1) \implies 0 \leq u_{n+1} \leq 1.$$

D'où l'assertion par récurrence. Remarquons en parallèle que

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n - u_n^2 - u_n = u_n - u_n^2 = \underbrace{u_n}_{\geq 0} \underbrace{(1 - u_n)}_{\geq 0} \geq 0.$$

La suite est donc croissante et bornée et converge donc vers un point fixe $\ell \in \{0, 1\}$. Par croissance de la suite, on ne peut pas avoir $\ell = 0$ car la limite doit être supérieure au premier terme $1/2 > 0$. Ainsi, $\ell = 1$.

- (c) L'égalité est évidente au rang $n = 0$. Supposons qu'elle soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - u_n^2 = u_n(2 - u_n) = \left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2^{2^{n+1}}} = 1 + \frac{1}{2^{2^{n+1}}}. \end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence.

- (d) Commençons par voir que $u_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, c'est évident pour $n = 0$, puis par croissance de f sur \mathbb{R}_- on a

$$u_n \leq 0 \implies f(u_n) \leq f(0) \implies u_{n+1} \leq 0.$$

D'où l'assertion par récurrence. Ensuite, on remarque que la suite est décroissante car

$$u_{n+1} - u_n = \underbrace{u_n}_{\leq 0} \underbrace{(1 - u_n)}_{\geq 0} \leq 0.$$

La suite ne peut donc pas converger car si c'était le cas elle convergerait vers une limite $\ell \in \{0, 1\}$ qui doit être un point fixe et cette limite devrait être inférieure au premier terme $u_0 = -1$ par décroissance ce qui est impossible. La suite diverge.

Solution 2

Appelons cette matrice A . Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$P_A(x) = \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3).$$

On a donc deux valeurs propres -1 et 3 . On résout les systèmes associés.

$$\begin{aligned} AX = -1X &\iff \begin{cases} x + 2y = -x \\ 2x + y = -y \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = -2y \\ 2x = -2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ y = y \end{cases} \\ &\iff X = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff X \in \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$AX = 3X \iff \begin{cases} x + 2y = 3x \\ 2x + y = 3y \end{cases} \iff \begin{cases} -2x = -2y \\ 2x = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

On a donc

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution 3

1.

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Commençons par calculer.

$$\begin{aligned} f(u) &= f(1, 0, 0) = (-2, -1, -4) = (1, 0, 0) - (3, 1, 4) = u - w ; \\ f(u') &= f(1, 1, 1) = (1, 1, 1) = u' ; \\ f(v) &= f(0, 1, 0) = (0, 1, 0) = v ; \\ f(w) &= f(3, 1, 4) = (6, 2, 8) = 2(3, 1, 4) = 2w. \end{aligned}$$

On déduit de ces calculs les matrices de f dans les bases $\{u, v, w\}$ et $\{u', v, w\}$ respectivement

$$\text{Mat}_{\{u,v,w\}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\{u',v,w\}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. L'application f est diagonalisable car sa matrice dans la base $\{u, v, w\}$ est diagonale.

Solution 4

Déterminons les points stationnaires.

$$\begin{aligned} (x, y) \text{ est un point stationnaire} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + e^x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (0, -1). \end{aligned}$$

Le seul point stationnaire est donc $(0, -1)$. Déterminons sa nature.

$$D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, -1) \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, -1) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, -1) = 1 - e^0 \times 0 = 1 > 0.$$

Il s'agit donc d'un point col. La fonction n'a pas d'extremum.

Bibliographie